Travaux virtuels en statique

1. Introduction

Le principe des travaux virtuels en statique est énoncé par Jean Bernoulli en 1725. Pour un ensemble de solides soumis à des forces extérieures $\overrightarrow{F_\alpha}$, la somme des travaux virtuels infinitésimaux de ces forces est nulle. On peut écrire une expression symbolique :

$$\Sigma \ \overrightarrow{F_\alpha} \, . \, \delta \, \overrightarrow{OM_\alpha} = 0 \, .$$

O est un point fixe et les M_α sont les points d'application des forces extérieures $\overrightarrow{F_\alpha}$.

Remarques

-On parle de travail virtuel et de mouvement virtuel car en réalité il y a équilibre.

-Les mouvements infinitésimaux ne sont pas quelconques ; Il doivent être compatibles avec les liaisons.

-Les forces intérieures ne sont pas prises en compte. Intuitivement leurs effets se compensent en vertu du principe de l'action et de la réaction. C'est la grande force de cette méthode car classiquement on doit isoler chaque solide, résoudre des systèmes d'équations pour s'apercevoir finalement que les forces intérieures ne jouent pas de rôle. On dit parfois qu'elles s'éliminent.

A partir d'une situation type nous allons expliquer le bien-fondé de ce principe.

Sur la figure 1 un solide S est en équilibre sous l'action de trois forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$ respectivement appliquées aux points M_1 , M_2 et M_3 .

Les lois de la statique impliquent :

-La résultante des forces est nulle, soit $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$.

-Les droites d'action des forces sont concourantes (au point C sur la figure 1).

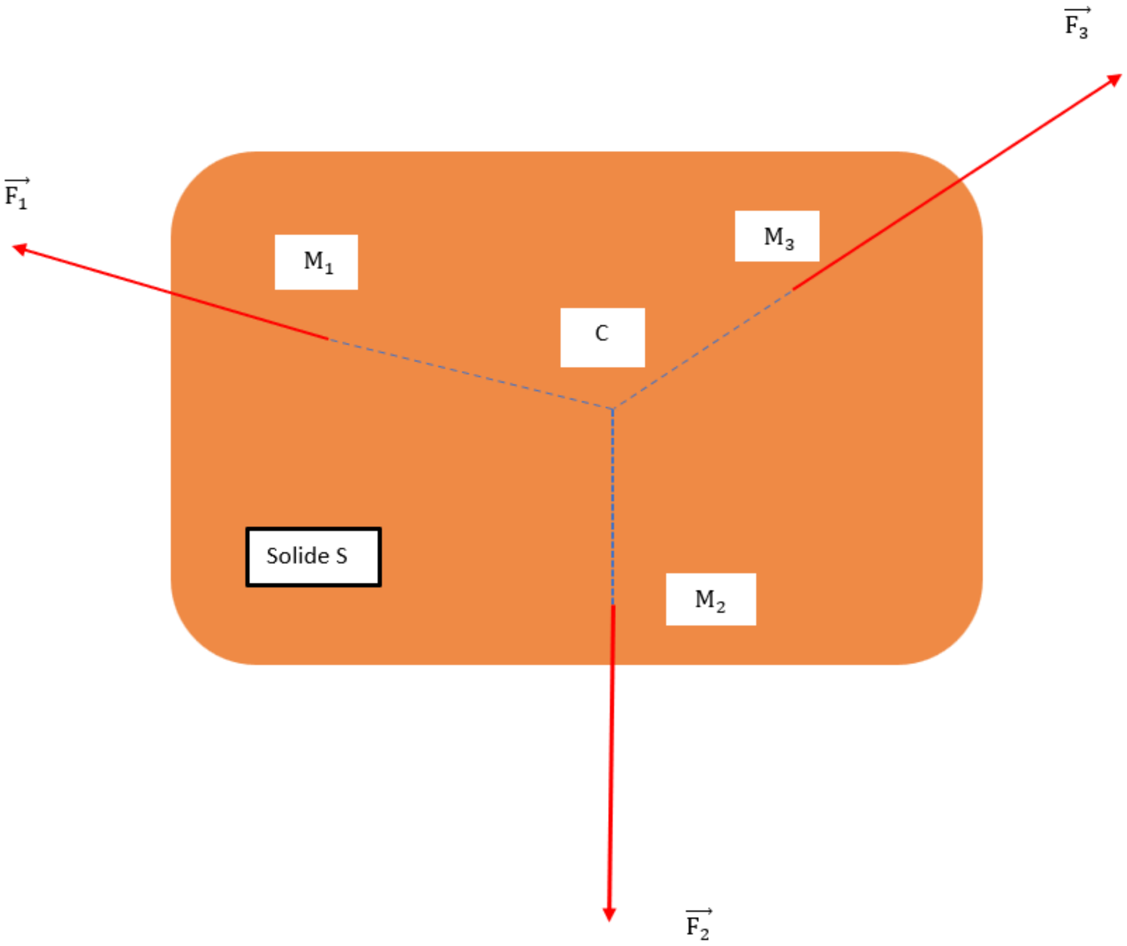

Figure 1

Considérons le même solide S non soumis aux trois forces donc ayant à priori libre de se déplacer (dans le temps) en translation et en rotation. Si $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation alors les déplacements élémentaires (bien réels) des points M_1 ,M_2 et M_3 vérifient :

$$\delta\, \overrightarrow{OM_1} = \delta\, \overrightarrow{OC} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM_1}\ \delta t$$

$$\delta\, \overrightarrow{OM_2} = \delta\, \overrightarrow{OC} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM_2}\ \delta t$$

$$\delta\, \overrightarrow{OM_3} = \delta\, \overrightarrow{OC} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM_3}\ \delta t$$

Remarques

-Le symbole × correspond au produit vectoriel.
-Les expressions ci-dessus proviennent des relations entre vitesses de deux points du solide S.
-La notation ronde δ est utilisée pour rester dans le cadre initial des travaux virtuels. On aurait pu garder la traditionnelle notation droite d.

Calculons la somme des travaux virtuels :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_1}\,.\,\delta\,\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{F_2}\,.\,\delta\,\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{F_3}\,.\,\delta\,\overrightarrow{OM_3} = {} & \overrightarrow{F_1}\,.\,(\,\delta\,\overrightarrow{OC} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM_1}\ \delta t\,) \\ & + \\ & \overrightarrow{F_2}\,.\,(\,\delta\,\overrightarrow{OC} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM_2}\ \delta t\,) \\ & + \\ & \overrightarrow{F_3}\,.\,(\,\delta\,\overrightarrow{OC} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM_3}\ \delta t\,)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_1}\,.\,\delta\,\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{F_2}\,.\,\delta\,\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{F_3}\,.\,\delta\,\overrightarrow{OM_3} = {} & (\,\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}\,)\,.\,\delta\,\overrightarrow{OC} && (1) \\ & + \\ & \overrightarrow{F_1}\,.\,(\,\vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM_1}\,)\ \delta t && (2) \\ & + \\ & \overrightarrow{F_2}\,.\,(\,\vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM_2}\,)\ \delta t && (3) \\ & + \\ & \overrightarrow{F_3}\,.\,(\,\vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM_3}\,)\ \delta t && (4)\end{aligned}$$

Le terme (1) est nul car l'équilibre implique la nullité de la résultante des forces.
Les termes (2),(3) et (4) sont nuls car les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires aux forces $\vec{F}$.

Finalement on obtient :

$$\overrightarrow{F_1}\,.\,\delta\,\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{F_2}\,.\,\delta\,\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{F_3}\,.\,\delta\,\overrightarrow{OM_3} = 0\,.$$

Il faut comprendre que la relation ci-dessus provient de la fusion de relations provenant de la statique (forces mais pas de mouvement) et de la cinématique libre (mouvement mais pas de forces)

Nous allons appliquer ce principe à deux grands classiques :
-Barre horizontale en équilibre
-Système bielle manivelle

2. Barre horizontale en équilibre

Sur la figure 2 une barre horizontale en appui sur un couteau. Sous l'action de trois forces $\overrightarrow{F_1}$, $\vec{R}$ et $\overrightarrow{F_2}$ respectivement appliquées aux points M_1, M et M_2 la barre est immobile.

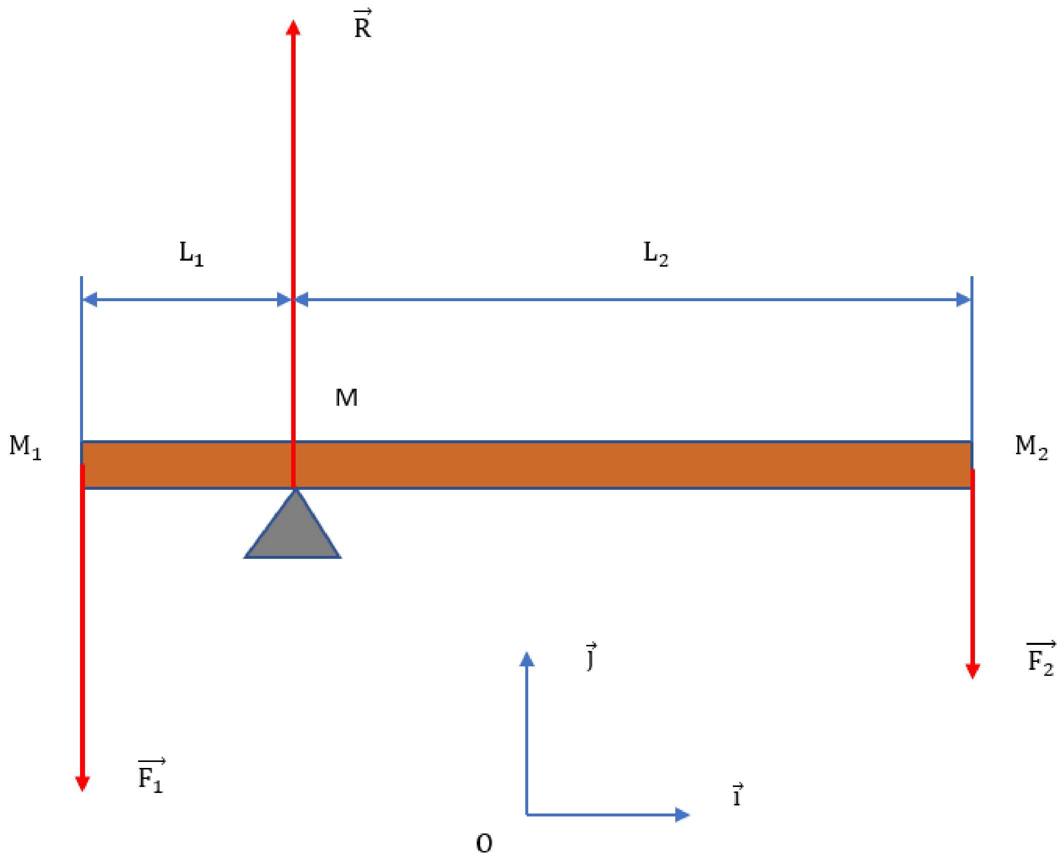

Figure 2

Forces

$\overrightarrow{F_1} = - F_1 \, \vec{j}$ $\qquad$ $\vec{R} = R \, \vec{j}$ $\qquad$ $\overrightarrow{F_2} = - F_2 \, \vec{j}$

Déplacements virtuels indépendants

$\delta \, \overrightarrow{OM_1} = (\, \delta y - L_1 \, \delta\theta \,) \, \vec{j}$ $\qquad$ $\delta \, \overrightarrow{OM} = \delta y \, \vec{j}$ $\qquad$ $\delta \, \overrightarrow{OM_2} = (\, \delta y + L_2 \, \delta\theta \,) \, \vec{j}$

δy : Translation verticale vers le haut
$\delta\theta$: Rotation autour de M dans le plan de la figure. Les angles sont orientés avec le sens trigonométrique.

Théorème des travaux virtuels

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \delta \, \overrightarrow{OM_1} + \vec{R} \cdot \delta \, \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{F_2} \cdot \delta \, \overrightarrow{OM_2} = 0$$

$- F_1 (\delta y - L_1 \delta\theta) + R \delta y - F_2 (\delta y + L_2 \delta\theta) = 0$

$(- F_1 + R - F_2) \delta y + (F_1 L_1 - F_2 L_2) \delta\theta = 0$

La forme linéaire ci-dessus est identiquement nulle si et seulement si

$- F_1 + R - F_2 = 0$ (i)

$F_1 L_1 - F_2 L_2 = 0$ (ii)

Relation (i) : Théorème de la résultante
Relation (ii) : Théorème des moments appliqué au point M

3. Système bielle manivelle

Sur la figure 3 les barres LM et MN sont articulées en M. les actions extérieures sont le couple $\vec{C}$ et la force $\vec{F}$. l'ensemble est immobile.

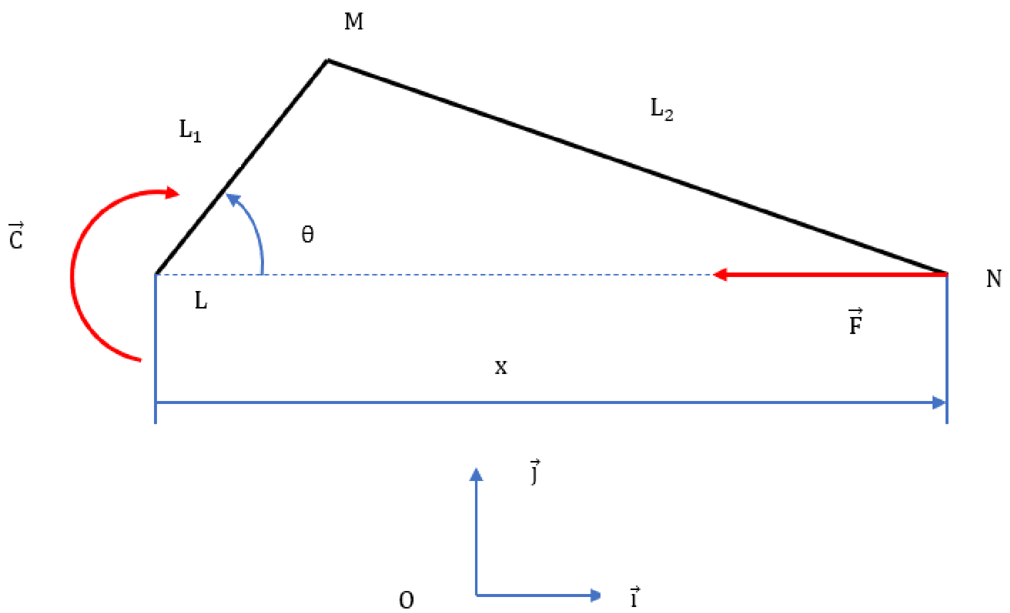

Figure 3

Couples et forces

$\vec{C} = - C\,\vec{k} \qquad \vec{F} = - F\,\vec{i}$

Déplacements virtuels dépendants

$\overrightarrow{\delta\theta} = \delta\theta\,\vec{k} \qquad \delta\,\overrightarrow{OM} = \delta x\,\vec{i}$

$\delta\theta$: Rotation de la tige LM autour de M dans le plan de la figure. Les angles sont orientés avec le sens trigonométrique.
δx : Translation horizontale.

$\delta\theta\,\delta x < 0$

Les déplacements $\delta\theta$ et δx sont reliés par la contrainte géométrique :

$(L_1 \sin(\theta))^2 + (x - L_1 \cos(\theta))^2 = L_2^2.$

On en déduit :

$2\,x\,\delta x - 2\,L_1 \cos(\theta)\,\delta x + 2\,L_1\,x \sin(\theta)\,\delta\theta = 0$

$(x - L_1 \cos(\theta))\,\delta x + L_1\,x \sin(\theta)\,\delta\theta = 0 \quad \text{(iii)}$

Théorème des travaux virtuels

$\vec{C} \cdot \overrightarrow{\delta\theta} + \vec{F} \cdot \delta\,\overrightarrow{OM} = 0$

$- C\,\delta\theta - F\,\delta x = 0$

Utilisons (iii) :
$- C\,\delta\theta - F\,((L_1\,x \sin(\theta))/(x - L_1 \cos(\theta)))\,\delta\theta = 0$

Finalement :

$$C = \frac{L_1\,x \sin(\theta)}{x - L_1 \cos(\theta)}\,F$$

Remarques

-La relation entre C et F est obtenue rapidement.
-On peut obtenir le résultat en isolant la bielle puis la manivelle. Dans cette voie il faut faire intervenir les forces d'une pièce sur l'autre et tenir compte du principe de l'action et de la réaction. Les calculs sont simples mais longs.